ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
11 КЛАСС

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические (письменные) задания.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

– не спеша, внимательно прочитайте задание и определите, наиболее верный и полный ход решения и ответ;

– отвечая на теоретический вопрос, обдумайте и сформулируйте конкретный ответ только на поставленный вопрос;

– запишите решение каждого теоретического вопроса.

Не спешите сдавать решения досрочно, ещё раз проверьте все решения и ответы.

Задание теоретического тура считается выполненным, если Вы вовремя сдаете его членам жюри.

Время выполнения заданий – 235 минут (3 часа 55 минут).

Общее максимальное количество баллов за задания олимпиады – 35 баллов.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7 в зависимости от полноты ответа.

Задача 1

Аркадий, Борис и Василий решили пробежать одну и ту же дистанцию, состоящую из нескольких кругов. Аркадий каждый круг пробегал на 2 минуты быстрее Бориса, а Борис — на 3 минуты быстрее Василия, и все они бежали с постоянной скоростью. Когда Аркадий закончил дистанцию, Борису осталось пробежать один круг, а Василию — два круга. Сколько кругов составляла дистанция? Укажите все возможные ответы и объясните, почему других нет.

Задача 2

Найдётся ли такое натуральное n, что число $6n^2 + 5n$ будет какой-нибудь натуральной степенью числа 2?

Задача 3

Окружность ω касается сторон угла с вершиной в точке A в точках B и C. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на ω.

Задача 4

Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют действительные коэффициенты, при этом их старшие коэффициенты равны 1 и степень каждого равна 10. Известно, что уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $f(x + 1) = g(x - 1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

Задача 5

На каждой из десяти карточек написано по действительному числу. Для каждого непустого набора этих карточек нашли сумму всех чисел, написанных на карточках этого набора. Известно, что не все полученные суммы оказались целыми. Какое наибольшее возможное количество целых сумм могло при этом получиться?