ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
9 КЛАСС

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические (письменные) задания.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

– не спеша, внимательно прочитайте задание и определите, наиболее верный и полный ход решения и ответ;

– отвечая на теоретический вопрос, обдумайте и сформулируйте конкретный ответ только на поставленный вопрос;

– запишите решение каждого теоретического вопроса.

Не спешите сдавать решения досрочно, ещё раз проверьте все решения и ответы.

Задание теоретического тура считается выполненным, если Вы вовремя сдаете его членам жюри.

Время выполнения заданий – 235 минут (3 часа 55 минут).

Общее максимальное количество баллов за задания олимпиады – 35 баллов.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7 в зависимости от полноты ответа.

Задача 1

У Пети был большой деревянный куб размерами $30 \times 30 \times 30$ см^3. Петя решил покрасить весь куб, на что ушло 100 граммов краски. Однако позже Пете понадобились кубики поменьше, и он распилил большой куб 6 разрезами, параллельными граням куба (по 2 разреза, параллельных каждой паре граней), на 27 кубиков размерами $10 \times 10 \times 10$ см^3. Сколько необходимо краски для докрашивания всех полученных кубиков? Уже покрашенную поверхность Петя повторно не красит.

Задача 2

Про положительные действительные числа p и q известно, что каждое из уравнений $x^2 + px + q = 0$ и $x^2 + qx + p = 0$ имеет два различных действительных корня. Докажите, что уравнение $x^2 + (p + q)\,x + 2(p + q) = 0$ также имеет два различных действительных корня.

Задача 3

Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается сторон BC и CA соответственно в точках A_1 и B_1. На луче AB за точкой B взяли такую точку A_2, что $BA_1 = BA_2$. На луче BA за точкой A взяли такую точку B_2, что $AB_1 = AB_2$. Докажите, что точка пересечения прямых A_1A_2 и B_1B_2 лежит на ω.

Задача 4

Про четыре последовательных натуральных числа известно, что наибольшее из них является делителем произведения трёх остальных. Найдите все значения, которые может принимать наибольшееиз этих чисел.

Задача 5

Рассмотрим множество всех натуральных чисел, запись которых не содержит цифр, больших 1. Можно ли покрасить каждое число этого множества либо в синий, либо в красный цвет так, чтобы сумма любых двух различных одноцветных чисел содержала в своей записи не менее двух единиц?