ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
10 КЛАСС
Возможные решения и критерии оценивания

Задача 1. Два снаряда

В моменты выстрелов оба снаряда находятся в начале системы координат:

$$X_{10} = X_{20} = 0,\ Y_{10} = Y_{20} = 0. \qquad (1)$$

При столкновении координаты снарядов должны совпадать:

$$X_1 = X_2,\ Y_1 = Y_2. \qquad (2)$$

Запишем уравнения для этих координат. Движение вдоль горизонтальной оси OX равномерное:

$$X_1 = X_{10} + \upsilon_{0X}t_1 = X_{10} + \upsilon_0\cos(\alpha_1)t_1, \qquad (3)$$
$$X_2 = X_{20} + \upsilon_{0X}t_2 = X_{20} + \upsilon_0\cos(\alpha_2)t_2, \qquad (4)$$

где t_1 – промежуток времени между выстрелом и столкновением для первого снаряда, t_2 – промежуток времени между выстрелом и столкновением для второго снаряда. Движение вдоль вертикальной оси OY равнопеременное, ускорение $a_Y = -g$:

$$Y_1 = Y_{10}+\upsilon_{0Y}t_1 - (g\,t_1^2)/2 = Y_{10} + \upsilon_0\sin(\alpha_1)t_1 - (g\,t_1^2)/2, \qquad (5)$$
$$Y_2 = Y_{20}+\upsilon_{0Y}t_2 - (g\,t_2^2)/2 = Y_{20} + \upsilon_0\sin(\alpha_2)t_2 - (g\,t_2^2)/2, \qquad (6)$$

Из (1) и (2):

$$\cos(\alpha_1)t_1 = \cos(\alpha_2)t_2.$$

Отсюда

$$t_1 = [\cos(\alpha_2) / \cos(\alpha_1)]\, t_2. \qquad (7)$$

При этом $t_1>t_2$, так как $\alpha_1>\alpha_2$.

Предварительно подставив (5) в (3), приравниваем (3) и (4), :

$$\upsilon_0\sin(\alpha_1)[\cos(\alpha_2) / \cos(\alpha_1)]\, t_2 - (g / 2)\, [\cos(\alpha_2) / \cos(\alpha_1)]^2 t_2^2 = \upsilon_0\sin(\alpha_2)t_2 - g\, t_2^2/ 2.$$

Получим после преобразований:

$$(g / 2)\, [1 - \cos^2(\alpha_2) / \cos^2(\alpha_1)]t_2^2 = \upsilon_0[\sin(\alpha_2) - (\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2)) / \cos(\alpha_1)]t_2,$$

$$t_2 = (2\upsilon_0/ g)\, [(\sin(\alpha_2)\cos(\alpha_1) - \sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2)) / (\cos^2(\alpha_1) - \cos^2(\alpha_2))]\cos(\alpha_1), \qquad (8)$$
$$t_1 = (2\upsilon_0/ g)\, [(\sin(\alpha_2)\cos(\alpha_1) - \sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2)) / (\cos^2(\alpha_1) - \cos^2(\alpha_2))]\cos(\alpha_2). \qquad (9)$$

Находим искомый интервал времени:

$$t = t_1 - t_2 = (2\upsilon_0/ g)\, [(\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_2)\cos(\alpha_1)) / (\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2))]. \qquad (10)$$

С учетом известной формулы из тригонометрии

$$\sin(\alpha_1-\alpha_2) = \sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_2)\cos(\alpha_1),$$

получим окончательное выражение:

$$t = (2\upsilon_0/ g)\, [\sin(\alpha_1-\alpha_2) / (\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2))]. \qquad (11)$$

Для начальной скорости снарядов $\upsilon_0 = 500$ м/с и углов $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 45°$:

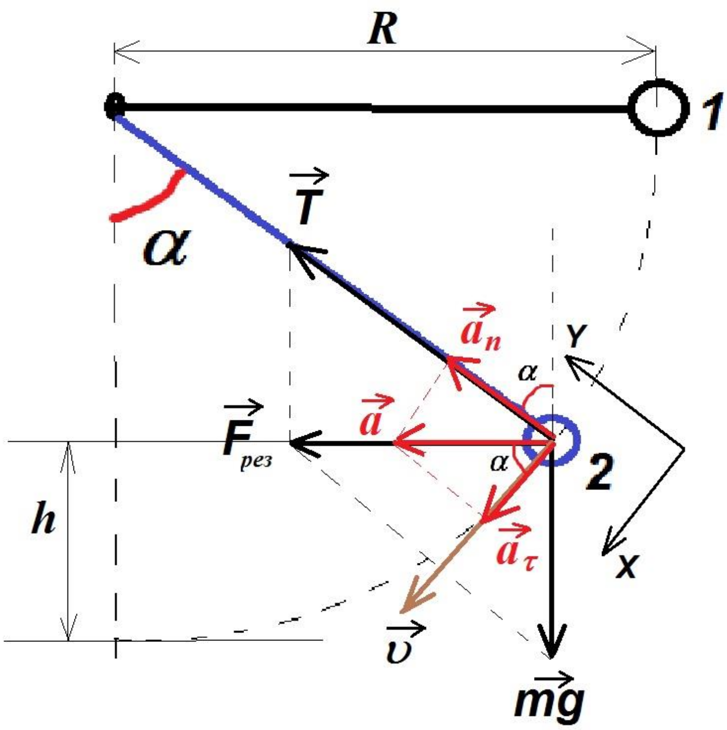
$t = (2\cdot500 / 10)\cdot[\sin(60° - 45°) / (\cos60° + \cos45°)] = \approx100 \cdot 0{,}259 / 1{,}207 \approx 21{,}5$ с.

Критерии оценивания решения:

Записаны выражения для координат (1) и (2)	1 балл
Записаны уравнения, описывающие движение вдоль оси OX (3) и (4)	2 балла
Записаны уравнения, описывающие движение вдоль оси OY (5) и (6)	2 балла
Получено выражение для t_1 (7)	1 балл
Сделаны преобразования и получен ответ в общем виде (10) или (11)	3 балла
Определен промежуток времени для второго пункта задачи	1 балл

Задача 2. Тело на нити

Сделаем рисунок с указанием сил и ускорений:



Запишем основной закон динамики (второй закон Ньютона) для тела в положении 2:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}.$$

Полное ускорение имеет две составляющие – тангенциальное ускорение и нормальное ускорение:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Спроецируем на оси OX и OY:

OX: $ma_\tau = mg\sin\alpha$,

OY: $ma_n = T - mg\cos\alpha$.

Отсюда можно выразить зависимость тангенциального ускорения от угла наклона нити:

$$a_\tau = g\sin\alpha. \qquad (1)$$

Так как центростремительное или нормальное ускорение:

$$a_n = \upsilon^2/R, \qquad (2)$$

то

$$ma_n = m(\upsilon^2/R) = T - mg\cos\alpha. \quad (3)$$

Чтобы выразить зависимость нормального ускорения от угла наклона нити, воспользуемся законом сохранения механической энергии. Запишем закон сохранения механической энергии для положения 1 и положения 2 на рисунке:

$$mgR = mgh + m\upsilon^2/2,$$
$$2gR = 2gh + \upsilon^2,$$
$$\upsilon^2 = 2g(R - h).$$

Так как

$$h = R - R\cos\alpha = R(1 - \cos\alpha),$$

то

$$\upsilon^2 = 2g\,(R - h) = 2g\,(R - R + R\cos\alpha) = 2gR\cos\alpha. \quad (4)$$

Подставив (4) в (3) и сделав преобразования получим зависимость силы натяжения нити от угла наклона нити:

$$m(2g\,R\cos\alpha/R) = T - mg\cos\alpha,$$
$$T = 3mg\cos\alpha. \qquad (5)$$

Подставим (5) в (3) и получим зависимость нормального ускорения тела от угла наклона нити:

$$m\,a_n = T - mg\cos\alpha,$$
$$a_n = 2g\cos\alpha. \qquad (6)$$

В тот момент времени, когда вектор полного ускорения будет направлен горизонтально (смотри рисунок), должны быть одинаковыми вертикальные составляющие векторов тангенциального ускорения и нормального ускорения:

$$a_n\cos\alpha = a_\tau\,\sin\alpha. \qquad (7)$$

С учетом (1) и (6) получим:

$$2g\cos^2\alpha = g\sin^2\alpha,$$
$$tg^2\alpha = 2,$$
$$\alpha = arctg\,(\sqrt{2}) = \approx 54{,}7°. \qquad (8)$$

Зная угол α, используя соотношение (5), можем определить силу натяжения нити:

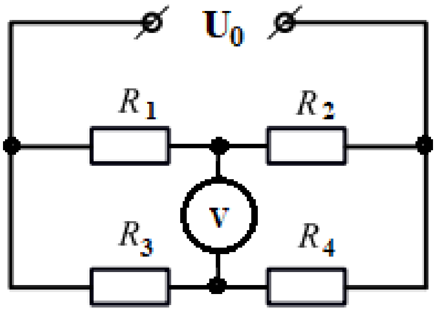
$$1 + tg^2\alpha = 1 / \cos^2\alpha\ , tg^2\alpha = 2,$$
$$\cos\alpha = 1 / \sqrt{3},$$
$$T = 3mg\cos\alpha = \sqrt{3}mg. \qquad (9)$$

Критерии оценивания решения:

Сделан рисунок с правильным указанием сил и ускорений	1 балл
Записан II закон Ньютона для тела и проекции закона на оси OX и OY	1 балл
Получена зависимость тангенциального ускорения от угла наклона (1)	1 балл
Записано выражение для нормального ускорения (2)	1 балл
Записан закон сохранения механической энергии для положений 1 и 2	1 балл
Получена зависимость силы натяжения нити от угла наклона нити (5)	1 балл
Получена зависимость нормального ускорения от угла наклона нити (6)	1 балл
Записано условие (7) (горизонтальность вектора полного ускорения)	1 балл
Найден искомый угол наклона α (8)	1 балл
Определена искомая сила натяжения нити T (9)	1 балл

Задача 3. Электрическая цепь

Сопротивления: $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = 2R$ и $R_4 = R$.



Так как через идеальный вольтметр ток не течет, то:

$$U_2 = 2U_1 \text{ и } U_3 = 2U_4 \qquad (1)$$

Также из соображений симметрии:

$$U_3 - U_1 = U_2 - U_4 = U_V \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем, что:

$$U_1 = U_4 \text{ и } U_2 = U_3 \qquad (3)$$

Из (2), используя (3), получим:

$$U_3 = U_2 = 2U_V \text{ и } U_1 = U_4 = U_V. \qquad (4)$$

Так как

$$U_1 + U_2 = U = U_3 + U_4, \qquad (5)$$

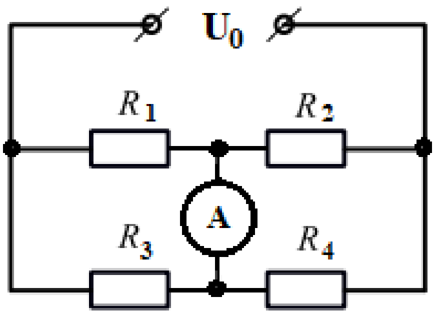
то

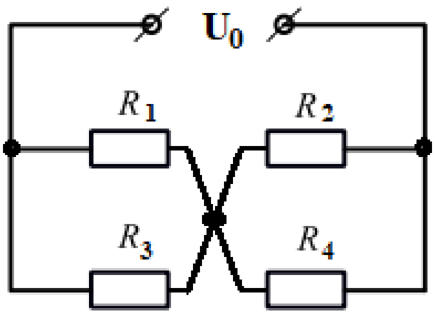
$$U_0 = 3U_V = 12 \text{ В}. \qquad (6)$$

При включенном вольтметре общее сопротивление цепи:

$$R_{12} = R_{34} = 3R,$$

$$R_{\text{общV}} = (R_{12} \cdot R_{34}) / (R_{12} + R_{34}) = 3R/2. \qquad (7)$$





При включенном амперметре сопротивление цепи:

$$R_{13} = R_{24} = 2R/3,$$

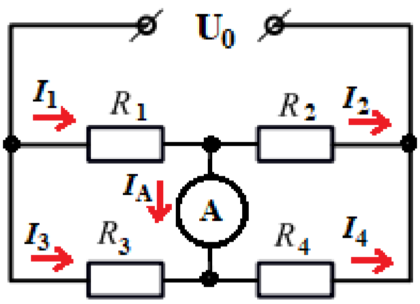
$$R_{\text{общA}} = R_{13} + R_{24} = 2R/3 + 2R/3 = 4R/3. \qquad (8)$$

Общий ток в цепи:

$$I_0 = U_0 / R_{\text{общA}} = 3U_0 / 4R. \qquad (9)$$

Так как

$$U_{13} = U_{24} = U_0 / 2, \qquad I_1 = I_4 = U_0 / 2R, \qquad I_2 = I_3 = U_0 / 4R,$$



то ток через амперметр:

$I_A = I_1 - I_2 = U_0 / 4R$. (10)

Выразим R:

$R = U_0 / 4I_A = 3U_V / 4I_A$. (11)

Определяем искомую мощность всей цепи при включенном вольтметре:

$P = U_0^2/R_{общV} = 9U_V^2/1.5R = 6U_V^2/R = 24U_V^2I_A/3U_V = 8U_VI_A = 8\cdot4\cdot0.03 = 0.96$ Вт.

Критерии оценивания решения:

Найдено напряжение U_0 на клеммах идеального источника постоянного напряжения (любым доступным способом) (6)	3 балла
Найдено сопротивление $R_{общV}$ цепи при подключенном вольтметре (7)	1 балл
Найдено сопротивление $R_{общA}$ цепи при подключенном амперметре (8)	1 балл
Найден общий ток I_0 в цепи при подключенном амперметре (9)	1 балл
Найден ток через амперметр I_A в цепи с амперметром (10)	1 балл
Получено выражение для R (11)	1 балл
Определена искомая мощность всей цепи при включенном вольтметре	2 балла

Задача 4. Эксперименты со льдом и водой

1) На первом участке (до точки излома 1) происходит процесс нагрева льда, но без плавления. Начальная температура льда меньше 0˚С. Уровень воды поднимается только за счет заливаемой воды.

2) В точке 1 начинается плавление льда. Далее изменение уровня воды идет за счет заливаемой воды и плавления льда. Коэффициент угла наклона меньше, чем на начальном участке в связи с плавлением льда (плотность льда меньше, чем у воды).

3) Самый интересный участок между точками 2 и 3. Резкое уменьшение уровня воды в сосуде в точке 2 можно объяснить тем, что внутри льда располагался пузырек воздуха. При разгерметизации полости с воздухом происходит быстрое всплытие пузырька на поверхность жидкости. Вода заполняет полость, что приводит к скачкообразному понижению уровня воды в сосуде.

4) На участке 3 и 4 процесс плавления льда продолжается.

5) В точке 4 весь лед превращается в жидкость. Дальнейшее повышение уровня воды в сосуде снова идет только за счет заливаемой воды.

6) Используя первый участок на графике определяем внутреннее сечение цилиндра S:

$(H_1 - H_0)S\rho_1 = m_1$,

$S = m_1 / ((H_1 - H_0)\rho_1) = 0{,}04$ кг / [(0,16 - 0,12)см$\cdot$1000 кг/м^3] = 0,001 м^2 = 10 см^2.

7) Зная S можно найти объем воздушного пузыря (через скачок высоты, участок 2-3 на графике):

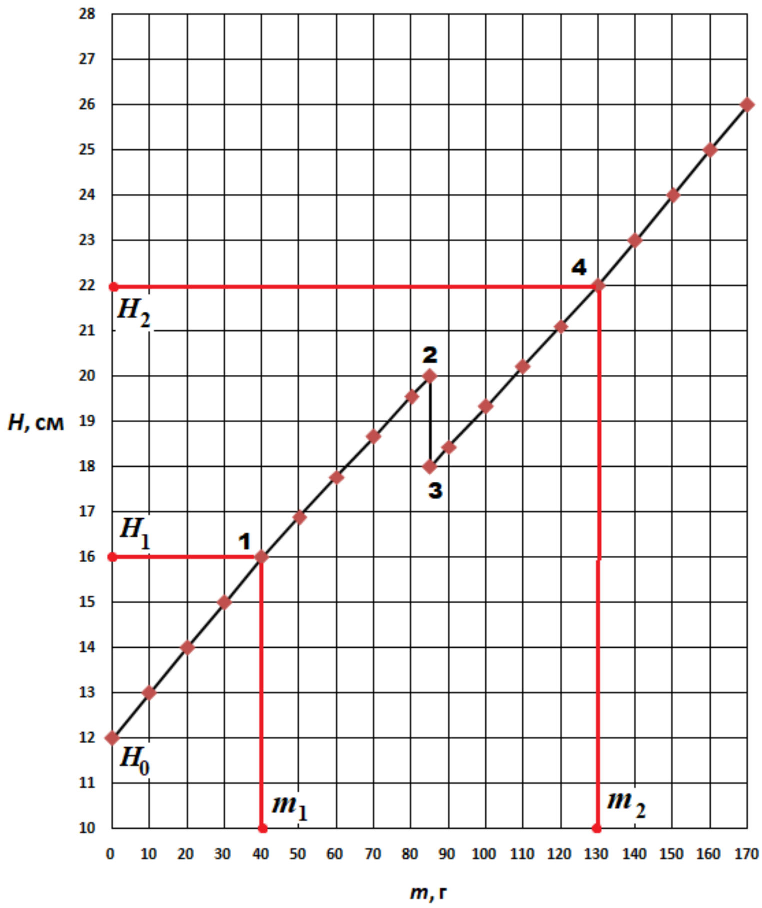
$V_1 = \Delta H \cdot S$ = (0.20 м - 0,18 м) ·0,001 м^2= 0,00002 м^3 = 20 см^3.

8) Для второго участка справедливо соотношение (участок между точками 1 и 4, на этом участке уровень воды в сосуде увеличивается за счет заливаемой воды за вычетом объема воздушного пузыря и за счет плавления льда, m_X – масса льда):

$$(H_2 - H_1)S = [(m_2 - m_1)/\rho_1 - V_1] - [m_X/\rho_2 - m_X/\rho_1] .$$

Отсюда можно найти искомую начальную массу льда в сосуде:

$$m_X = 0{,}090 \text{ кг} = 90 \text{ г}.$$



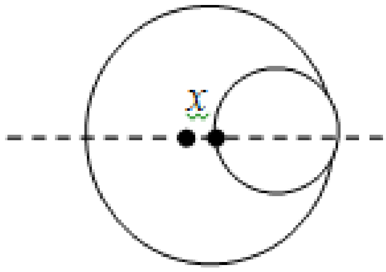
Критерии оценивания решения:

Первый пункт решения	1 балл
Второй пункт решения	1 балл
Третий пункт решения	2 балла
Четвертый и пятый пункты решения	1 балл
Определено поперечное сечение сосуда S	1 балл
Определен объем воздушного пузырька	1 балл
Восьмой пункт решения (выражение для определения массы льда)	2 балла
Представлен правильный числовой ответ	1 балл

Задача 5. Цилиндр с полостью

1) Найдем положение центра тяжести цилиндра с отверстием. Ясно, что он должен лежать на прямой, проходящей через центры цилиндра и отверстия. Центр тяжести целого цилиндра лежит на его оси, а центр тяжести цилиндра, заполняющего отверстие, – на оси отверстия. Рассматривая целый цилиндр как два тела – цилиндр с отверстием и «вставка», заполняющая отверстие, и обозначив через x расстояние до центра масс цилиндра с отверстием, мы можем записать, что:

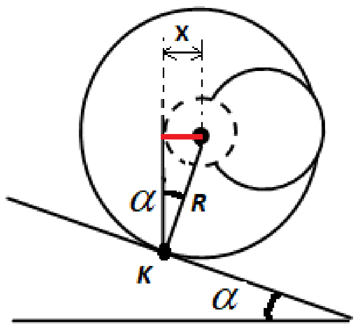
$$x\left(Mg - Mg\frac{\pi(\frac{R}{2})^2}{\pi R^2}\right) = \frac{R}{2}Mg\frac{\pi(\frac{R}{2})^2}{\pi R^2},$$



(M – масса цилиндра, $M\frac{\pi(\frac{R}{2})^2}{\pi R^2}$ – масса «вставки»).

Отсюда $x = R / 6$.

2) Если доску медленно поднимать за один из концов, цилиндр будет поворачиваться, занимая устойчивое положение, при котором его центр тяжести будет находиться на вертикали, проходящей через точку K касания цилиндра с дощечкой. При этом положения, которые может занимать центр тяжести цилиндра, лежат на окружности радиуса $x = R / 6$ с центром на оси цилиндра.



Очевидно, что устойчивое положение невозможно, и цилиндр начнет скатываться без проскальзывания, если вертикаль, проходящая через точку K касания цилиндра с доской, не пересекается с этой окружностью. В этом случае момент силы тяжести относительно точки касания цилиндра с доской не может быть равен нулю ни при каком положении цилиндра. Таким образом, угол, при котором цилиндр начнет скатываться, равен:

$\sin\alpha = x / R$.

Окончательный ответ: $\alpha = \arcsin(1 / 6) =\approx 9{,}6^\circ$.

Критерии оценивания решения:

Идея о рассмотрении целого цилиндра как двух тел	2 балла
Определено расстояние x до центра масс цилиндра с отверстием	3 балла
Условие скатывания цилиндра с отверстием на наклонной доске	3 балла
Получен правильный числовой ответ для угла	2 балла