ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП 10 КЛАСС

Решения и критерии оценивания

Общее максимальное количество баллов за задания олимпиады – 35 баллов.
Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.
Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

1. На плоскости Oxy расположена парабола $y(x)=x^2+px+q$. На оси абсцисс выбраны точки a и b, при этом $a<b$. Известно, что $y(a)=y(b)$. Докажите, что абсцисса вершины параболы совпадает с серединой отрезка $[a,b]$.

Решение. Выделяя полный квадрат $y(x)=x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2-\dfrac{p^2}{4}+q$, получаем, что вершина параболы (x_0,y_0) имеет абсциссу $x_0=-p/2$. Условие $y(a)=y(b)$ означает, что $a^2+pa+q=b^2+pb+q$, то есть $a^2-b^2=p(b-a)$, откуда $p=-(a+b)$ и $x_0=\dfrac{a+b}{2}$.

Критерии оценки: Найдено одно из двух условий $x_0=-p/2$ и $p=-(a+b)$ – минимум 2 балла.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известны углы $\angle ACB=\angle ADB=\angle BAC=20^\circ$. Чему равен угол $\angle BDC$?

Ответ: $\angle BDC=20^\circ$. *Решение.* Опишем окружность W вокруг ΔABC. Поскольку $\angle ACB=\angle ADB$ и точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB, то $D\in W$ и $ABCD$ – вписанный четырехугольник. Следовательно, $\angle BAC=\angle BDC$, так как оба опираются на хорду BC.

Критерии оценки: Доказано, что четырехугольник $ABCD$ вписанный – минимум 3 балла.

3. Докажите, что число $5^{120}+2^{150}$ делится на 13.

Решение. Поскольку

$$5^{120}+2^{150}=(5^2)^{60}+(2^6)^{25}=(13\cdot 2-1)^{60}+(13\cdot 5-1)^{25},$$

остаток от деления этого числа на 13 такой же, как у числа $(-1)^{60}+(-1)^{25}$, то есть 0.

Критерии оценки: Найден остаток от деления на 13 одного из чисел 5^{120} и 2^{150} - минимум 2 балла.

4. Дан квадрат 9×9. На какое минимальное количество меньших квадратов (не обязательно равных) с целочисленными сторонами его можно разрезать?

Ответ. На 6.

Решение. Нетрудно показать, как разрезать квадрат 9×9 на 6 квадратов: один квадрат 6×6 и пять квадратов 3×3. Остается показать, что на меньшее количество квадратов его разрезать нельзя. Рассмотрим произвольное разрезание квадрата на меньшие квадраты.

Очевидно, что все углы квадрата 9×9 должны принадлежать разным квадратам разрезания (действительно, если два угла принадлежат одному квадрату, то и все четыре). Следовательно, квадратов разрезания не менее четырех. Если их ровно 4, то легко видеть, что все они должны быть равны, что невозможно, поскольку длина стороны большого квадрата нечётная. Остается показать, что квадрат 9×9 нельзя разрезать на 5 меньших квадратов. Допустим, что это сделать удалось. Тогда, поскольку $5\cdot(4\cdot4)=80<81=9\cdot9$, хотя бы один из пяти квадратов должен иметь размер 5×5 или больше. Если он имеет размер 5×5, то суммарная площадь остальных четырех квадратов равна $81-25=56$ клеткам. Как минимум три из этих четырех квадратов должны иметь размер 4×4 (поскольку $2\cdot(4\cdot4)+2\cdot(3\cdot3)=50<56$), но тогда площадь четвертого квадрата равна $56-3\cdot(4\cdot4)=8$, что невозможно. Если наибольший из пяти квадратов разрезания имеет размер 6×6, то размеры остальных не превосходят 3×3, поэтому их понадобится минимум 4. Если наибольший из пяти квадратов разрезания имеет размер 7×7 или 8×8, то размеры остальных не превосходят соответственно 2×2 и 1×1 и легко видеть, что их понадобится больше четырех.

Замечание. В предложенном выше решении доказывается, что квадрат 9×9 нельзя разрезать на 5 меньших квадратов, но справедливо гораздо более сильное утверждение: *никакой (!) квадрат нельзя разрезать на 5 меньших квадратов*. Действительно, рассмотрим произвольное разрезание квадрата на меньшие квадраты, а в нем квадраты К1, К2, К3, К4, лежащие в углах большого квадрата. Если все углы этих квадратов, противоположные углам большого квадрата, совпадают, то квадратов разрезания ровно 4. Если совпадают какие-то углы квадратов К1 – К4, но эти 4 квадрата не покрывают большой квадрат целиком, то оставшаяся часть большого квадрата квадратом не является: либо она имеет форму буквы Т (если совпадают углы квадратов, находящихся в соседних углах большого квадрата), либо состоит из двух фигур, каждая из которых прямоугольник или «уголок» (если совпадают углы квадратов, находящихся в противоположных углах большого квадрата), либо является «уголком» (если общий угол имеют три квадрата). Наконец, если никакие углы квадратов К1 - К4 не совпадают, то незанятая этими четырьмя квадратами область большого квадрата, очевидно, квадратом не является.

Критерии оценки. Только ответ – 0 баллов. Ответ с примером разрезания на 6 квадратов – 2 балла. Доказано, что квадратов разрезания не менее пяти – 1 балл. Баллы за два последних пункта суммируются.

5. У любознательной Димы есть 2022 одинаковых пуговицы, у каждой пуговицы одна из сторон чёрная, а другая белая. Дима разложил пуговицы по кругу так, что белой стороной вверх лежат 2021 пуговица, а последняя пуговица – чёрной. Дима придумал себе игру. За один ход можно одновременно перевернуть две пуговицы только в двух случаях:

1) эти пуговицы соседние и они лежат одинаковыми сторонами вверх,
2) эти пуговицы лежат через одну и повернуты разными сторонами вверх.

Удастся ли Диме перевернуть пуговицы так, чтобы каждая пуговица в итоге оказалась перевернутой относительно начального положения?

Решение. Занумеруем пуговицы по часовой стрелке по порядку: 1, 2, 3, …, 2022 (начнём, например, с чёрной пуговицы). Разделим все пуговицы на два множества: $S_н$ – пуговицы с нечётными номерами, $S_ч$ – пуговицы с чётными номерами. В $S_н$ и в $S_ч$ по 1011 пуговиц. Будем следить за чёрными пуговицами в каждом из множеств $S_н$, $S_ч$. Заметим, что вторая операция действует только на пуговицы из одного множества, $S_н$ или $S_ч$, и не меняет числа чёрных пуговиц в нём. Первая операция изменяет число чёрных пуговиц на 1 штуку в обоих множествах $S_н$ и $S_ч$: либо одновременно увеличивает, либо одновременно уменьшает. Значит, при любой серии из допустимых операций, если в одном множестве чёрных пуговиц меньше, то и всегда будет меньше. Изначально в $S_н$ одна чёрная пуговица, в $S_ч$ нет чёрных пуговиц. Значит, в $S_н$ всегда должно быть чёрных пуговиц больше. Но по условию в конце должно быть в $S_н$ – 1010 чёрных пуговиц, а в $S_ч$ – 1011 чёрных пуговиц, что недопустимо. Поэтому конечную раскладку пуговиц получить невозможно.

Критерии оценки. Замечено, что чётность общего количества чёрных пуговиц (как и белых) не меняется – 0 баллов. Предложено следить отдельно за пуговицами с чётными и нечётными номерами – минимум 2 балла. Замечание, что чётность количества чёрных и белых пуговиц во множествах $S_н$ и $S_ч$ меняется одновременно, не добавляет баллов.