**Всероссийская олимпиада школьников по математике — 2022-23**

**Пермский край, муниципальный этап**

# 11 класс

*Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут (235 минут).*
*Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.*
*Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.*

11.1. Аркадий, Борис и Василий решили пробежать одну и ту же дистанцию, состоящую из нескольких кругов. Аркадий каждый круг пробегал на 2 минуты быстрее Бориса, а Борис — на 3 минуты быстрее Василия, и все они бежали с постоянной скоростью. Когда Аркадий закончил дистанцию, Борису осталось пробежать один круг, а Василию — два круга. Сколько кругов составляла дистанция? Укажите все возможные ответы и объясните, почему других нет.

**Ответ.** 6.

**Решение.** Пусть дистанция составляет $n$ кругов, и Аркадий тратит $t$ минут на круг. Тогда за $nt$ минут Аркадий пробегает всю дистанцию. За это время Борис пробегает на один круг меньше, а Василий — на два круга меньше. Значит $nt = (n-1)(t+2)$ и $nt = (n-2)(t+5)$. Отсюда следует, что $2n = t+2$ и $5n = 2t+10$, значит $n = 5n-4n = (2t+10) - 2\cdot(t+2) = 6$. Заметим, что в этом случае $t = 10$, и все условия выполнены.

**Комментарий.** Только ответ — 2 балла.

**Замечание.** Из текста задачи следует, что хотя бы один ответ у задачи есть. Поэтому, если доказано, что никаких других ответов кроме $n = 6$ быть не может, то не обязательно делать проверку этого ответа.

11.2. Найдётся ли такое натуральное $n$, что число $6n^2+5n$ будет какой-нибудь натуральной степенью числа 2?

**Ответ.** Нет.

**Решение.** Заметим, что $6n^2+5n = n(6n+5)$. Так как $6n+5$ будет нечётным числом, большим 1, то оно будет иметь хотя бы один нечётный простой делитель. Но тогда $6n^2+5n$ не будет степенью 2.

**Комментарий.** Только ответ — 0 баллов.

11.3. Окружность $\omega$ касается сторон угла с вершиной в точке $A$ в точках $B$ и $C$. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник $ABC$, лежит на $\omega$.

**Первое решение.** Пусть $N$ — середина меньшей из дуг $BC$ окружности $\omega$. Тогда $\angle NBC = \angle NCB = \angle NBA$, где последнее равенство следует из того, что угол между хордой и касательной равен половине дуги, отсекаемой хордой. Так как $\angle NBC = \angle NBA$, то $NB$ — биссектриса угла $CBA$. Аналогично доказывается, что $CN$ — биссектриса угла $ACB$, поэтому $N$ — точка пересечения биссектрис треугольника $ABC$, то есть центр его вписанной окружности.

**Второе решение.** Пусть $I$ — центр вписанной в треугольник $ABC$ окружности. Для любого треугольника верна формула $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2}$. Действительно, если $\angle A = 2x$, $\angle B = 2y$, $\angle C = 2z$, то $2x + 2y + 2z = 180^\circ$, $x + y + z = 90^\circ$, и $\angle BIC = 180^\circ - y - z = 90^\circ + (90^\circ - y - z) = 90^\circ + x = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2}$.

Если $O$ — центр окружности $\omega$, то $\angle OBA = \angle OCA = 90^\circ$ (радиусы, проведённые в точки касания, перпендикулярны касательным). Но значит $\angle BOC = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle BAC$. Поэтому большая дуга $BC$ окружности $\omega$ равна $180^\circ + \angle BAC$, и так как $\angle BIC$ равен половине этого значения, то $I$ лежит на $\omega$.

**Комментарий.** Появляется явная формула, выражающая угол $BIC$ либо через угол $BAC$, либо через угол $CBA$ ($BCA$) — 2 балла.

11.4. Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют действительные коэффициенты, при этом их старшие коэффициенты равны 1 и степень каждого равна 10. Известно, что уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $f(x+1) = g(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

**Решение.** Пусть $f(x) = x^{10} + a_9x^9 + \ldots + a_0$, $g(x) = x^{10} + b_9x^9 + \ldots + b_0$. Уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно уравнению $f(x) - g(x) = 0$, и если $a_9 \neq b_9$, то левая часть последнего уравнения будет многочленом нечётной (девятой) степени, и значит это уравнение будет иметь хотя бы один действительный корень, что противоречит условию. Значит $a_9 = b_9 = a$.

Посмотрим на многочлен $h(x) = f(x+1) - g(x-1)$. $x^{10}$ (с ненулевыми коэффициентами) может появиться только из слагаемых $(x+1)^{10}$ и $-(x-1)^{10}$. Первое слагаемое даст нам $x^{10}$, а второе — $(-x^{10})$, значит они уничтожатся, поэтому степень $h(x)$ не более 9. $x^9$ (с ненулевыми коэффициентами) может возникнуть только из куска $(x+1)^{10} - (x-1)^{10} + a(x+1)^9 - a(x-1)^9$. При этом коэффициент при $x^9$ будет равен $10 - (-10) + a - a = 20$.

Итак, многочлен $h(x)$ имеет нечётную степень, значит уравнение $h(x) = 0$ имеет хотя бы один действительный корень, но значит и уравнение $f(x+1) = g(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

**Комментарий.** Доказано, что $a_9 = b_9$ — 2 балла.

**Замечание.** То, что многочлен нечётной степени имеет хотя бы один действительный корень считается известным, и не требует доказательства.

11.5. На каждой из десяти карточек написано по действительному числу. Для каждого непустого набора этих карточек нашли сумму всех чисел, написанных на карточках этого набора. Известно, что не все полученные суммы оказались целыми. Какое наибольшее возможное количество целых сумм могло при этом получиться?

**Ответ.** 511.

**Решение.** Ясно, что хотя бы на одной из карточек написано нецелое число, иначе сумма чисел любого набора будет целой. Выберем одну их таких карточек и назовём её $a$, а число на ней — $x$. Каждому набору $C$, в котором нет $a$ (в том числе пустому) поставим в соответствие набор $C \cup \{a\}$. Понятно, что разным наборам будут сопоставлены разные, так как если $C \cup \{a\}$ и $D \cup \{a\}$ совпали, то совпадают $C$ и $D$. Поэтому построенные так разные пары не имеют общих элементов.

Заметим, что любой набор $C$ окажется в одной из таких пар. Если в нём нет $\{a\}$, то он попадёт в пару по построению, если в нём есть $\{a\}$, то он ставится в пару набору из $C$ без $\{a\}$.

Итак, все наборы разбились на пары вида $(C, C \cup \{a\})$. Выкинем пару $(\varnothing, a)$ (так как оба набора не дают целой суммы) и посмотрим на оставшиеся. Разница сумм чисел на карточках наборов в паре отличается на число $x$, значит в каждой паре не более одного целого числа. Так как пар $\frac{2^{10}-2}{2} = 2^9 - 1 = 511$, то и наборов с целой суммой не более 511.

Если в нашем наборе 9 карточек, на которых написаны 0 и одна с числом $\frac{1}{2}$, то сумма чисел на карточках $2^9 - 1 = 511$ наборов будет 0, то есть целым числом.

**Комментарий.** Только ответ — 1 балл.

Есть ответ и предъявлен пример, при котором 511 целых сумм получаются — 2 балла.

В решении присутствует идея разбиения наборов на такие пары, что из каждой можно взять не более одного набора — 1 балл.

Доказано, что целых сумм будет не более 511 — 5 баллов.

**Замечание.** 511 целых сумм может получиться и в случае, когда ни одного целого числа на карточках не написано. Например, если на каждой из них написано число $\frac{1}{2}$, то мы получим ровно 511 целых сумм.