Всероссийская олимпиада школьников по математике — 2022-23

Пермский край, муниципальный этап

9 класс

Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут (235 минут).
Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.
Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

9.1. У Пети был большой деревянный куб размерами $30 \times 30 \times 30$ см^3. Петя решил покрасить весь куб, на что ушло 100 граммов краски. Однако позже Пете понадобились кубики поменьше, и он распилил большой куб 6 разрезами, параллельными граням куба (по 2 разреза, параллельных каждой паре граней), на 27 кубиков размерами $10\times10\times10$ см^3. Сколько необходимо краски для докрашивания всех полученных кубиков? Уже покрашенную поверхность Петя повторно не красит.

Ответ. 200 граммов.

Первое решение. Каждый разрез увеличивает незакрашенную поверхность на величину, равную удвоенной площади разреза. Понятно, что площадь разреза совпадает с площадью грани. Значит необходимо докрасить поверхность по величине равную $6 \cdot 2 = 12$ граням, то есть вдвое большую, чем поверхность куба. Значит необходимо $100 \cdot 2 = 200$ граммов краски.

Второе решение. У 27 кубиков новых кубиков суммарно $27 \cdot 6 = 162$ грани. При этом у них уже покрашены $6 \cdot 9 = 54$ грани. Но значит осталось покрасить $162 - 54 = 108$ граней, что вдове больше, чем 54. Значит на покраску 108 граней уйдёт $100 \cdot 2 = 200$ граммов краски.

Третье решение. После разрезов у нас будет 8 угловых кубиков, у которых не покрашены 3 грани, 12 не угловых кубиков, примыкающих к рёбрах большого куба, у них не покрашены 4 грани. Ещё остались 6 кубиков, примыкающих к центрам граней большого куба, у них не покрашены 5 граней, и центральный кубик, у него все грани не покрашены. Итак, нужно покрасить $8\cdot3+12\cdot4+6\cdot5+6 = 24+48+30+6 = 108$ граней маленьких кубиков. Но изначально мы покрасили $6 \cdot 9 = 54$ такие грани, на что ушло 100 граммов краски. Значит на покраску

$108 = 54 \cdot 2$ граней уйдёт 200 граммов краски.

Комментарий. Только ответ — 2 балла.

Решение следует первому авторскому решению, при этом забывается об удваивании незакрашенной поверхности — 2 балла.

9.2. Про положительные действительные числа p и q известно, что каждое из уравнений $x^2 + px + q = 0$ и $x^2 + qx + p = 0$ имеет два различных действительных корня. Докажите, что уравнение $x^2 + (p + q)x + 2(p + q) = 0$ также имеет два различных действительных корня.

Решение. Из условия следует, что $p^2 > 4q$ и $q^2 > 4p$. Отсюда получается, что $p^4 > 16q^2 > 64p$, $p^3 > 64$, $p > 4$. Аналогично доказывается, что $q > 4$. Дискриминант D уравнения $x^2 + (p + q)x + 2(p + q) = 0$ равен $(p + q)^2 - 8(p + q) = (p + q)(p + q - 8)$. Так как $p + q > 0$ и $p + q - 8 = (p - 4) + (q - 4) > 0$, то D является произведением двух положительных чисел и значит $D > 0$. Отсюда следует, что уравнение $x^2 + (p+q)x + 2(p+q) = 0$ имеет два различных действительных корня.

Комментарий. Выписаны соотношения $p^2 > 4q$, $q^2 > 4p$, и отмечено, что для решения задачи достаточно доказать неравенство $(p + q)^2 - 8(p + q) > 0$ — 1 балл.

Доказано неравенство $p > 4$ или $q > 4$ — 3 балла.

9.3. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается сторон BC и CA соответственно в точках A_1 и B_1. На луче AB за точкой B взяли такую точку A_2, что $BA_1 = BA_2$. На луче BA за точкой A взяли такую точку B_2, что $AB_1 = AB_2$. Докажите, что точка пересечения прямых A_1A_2 и B_1B_2 лежит на ω.

Решение. Пусть ω касается стороны AB в точке C_1, прямая A_1A_2 повторно пересекает ω в точке N. Так как $BC_1 = BA_1$ (отрезки касательных, проведённых из одной точки), то $BC_1 = BA_1 = BA_2$. Если $\angle A_1BC_1 = 2x$ и $\angle A_1BA_2 = 2y$, то $2x + 2y = 180°$, $x + y = 90°$, $\angle C_1A_1B = 90° - x$, $\angle A_2A_1B = 90° - y$, $\angle C_1A_1A_2 = 90° - x + 90° - y = 90°$ (другое доказательство равенства $\angle C_1A_1A_2 = 90°$ можно получить так: C_1, A_1 и A_2 лежат на окружности с центром в точке B, при этом C_1A_2 —

её диаметр). Значит $\angle C_1A_1N = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, то есть N и C_1 диаметрально противоположны. Аналогично доказывается, что если T — вторая точка пересечения B_1B_2 и ω, то T и C_1 диаметрально противоположны. Но значит $N = T$, и прямые A_1A_2 и B_1B_2 пересекаются на ω.

Комментарий. Доказано, что $\angle C_1A_1A_2 = 90^\circ$ — 2 балла

9.4. Про четыре последовательных натуральных числа известно, что наибольшее из них является делителем произведения трёх остальных. Найдите все значения, которые может принимать наибольшее из этих чисел.

Ответ. 6.

Первое решение. Пусть наши числа $n-3$, $n-2$, $n-1$, n, где $n-3 \geqslant 1$, $n \geqslant 4$. Так как числа $n-1$ и n взаимно просты, то $(n-3)(n-2)$ делится на n. Заметим, что $(n-3)(n-2) = n^2 - 5n + 6 = n(n-5) + 6$, и так как оба числа $(n-3)(n-2)$ и $n(n-5)$ делятся на n, то и 6 делится на n. Значит $n \leqslant 6$, и так как самое больше число не больше 6, то остаётся перебрать для него варианты $n = 4$, $n = 5$ и $n = 6$. Понятно, что только $n = 6$ подходит.

Второе решение. Пусть наши числа n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Заметим, что если наибольшее из этих чисел делится на простое число p, то какое-то из оставшихся чисел должно делится на p, но тогда и разность между ними, которая не больше 3, должна делится на p, значит $p \leqslant 3$. Поэтому $n + 3 = 2^m 3^k$.

Если $n+3$ делится на 9, то числа $n+1$ и $n+2$ не кратны 3, поэтому n должно делиться на 9. Но тогда $3 = n + 3 - n$ будет делиться на 9. Полученное противоречие говорит о том, $k \leqslant 1$. Если $n+3$ делится на 4, то числа n и $n+2$ не кратны 2, поэтому $n+1$ должно делиться на 4. Но тогда $2 = n + 3 - (n+1)$ будет делиться на 4. Полученное противоречие говорит о том, $m \leqslant 1$. Итак, все возможные варианты для наибольшего числа исчерпываются числами 1, 2, 3, 6. Понятно, что только последний вариант подходит.

Комментарий. Только ответ — 1 балл.

Доказано, что наибольшее число имеет вид $2^m 3^k$ — 2 балла.

9.5. Рассмотрим множество всех натуральных чисел, запись которых не содержит цифр, больших 1. Можно ли покрасить каждое число этого множества либо в синий, либо в красный цвет так, чтобы сумма любых двух различных одноцветных чисел содержала в своей записи не менее двух единиц?

Ответ. Да.

Решение. Понятно, что запись наших чисел не содержит других цифр, кроме 1 и 0. Покрасим в синий цвет все числа с нечётным количеством 1, в красный — все числа с чётным количеством 1. Рассмотрим два различных одноцветных числа. Если одно из них короче другого, дополним короткое нулями спереди, чтобы длины двух последовательностей цифр сравнялись. Заметим сразу, что сумма таких последовательностей совпадает с суммой исходных чисел.

Посмотрим на все места, где эти последовательности будут различаться. Такое место есть, иначе последовательности, а значит и числа, будут совпадать. Если последовательности отличаются ровно в одном месте, то число единиц в одной из последовательностей на 1 больше, чем в другой, значит количества единиц будут разной чётности, что противоречит покраске.

Итак, последовательности отличаются по крайней мере в двух местах, и сумма 0 и 1 в этих местах даст по крайней мере две 1.

Комментарий. Только ответ «да» — 0 баллов.

Приведена необходимая раскраска — 3 балла.